

数学

京大入試数学の特徴は、小問による誘導が少なく、その中で解答者が自分で初期設定をすることや論理的に説明できるかどうか問われることです。

ここでは、「第1回京大入試プレ」の数学において、よく見受けられた誤答例を紹介し、気を付けるべきポイントの解説を行います。下の問題が出題されたのは理系数学ですが、数Ⅰ・Ⅱからの出題となっていますので、文系の方も理解できる内容となっております。ぜひ一度、自力で問題を解いた後で読み進め、今後の学習に役立ててください。

理系② 問題

a を実数の定数とするとき、関数

$$y = 4^x + 4^{-x} - 2a(2^x + 2^{-x})$$

の最小値を求めよ。

生徒答案例

$$y = (2^x + 2^{-x})^2 - 2a(2^x + 2^{-x}) - 2$$

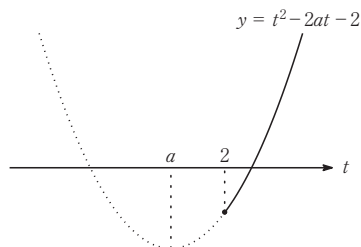
$t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと、 $2^x > 0$ 、 $2^{-x} > 0$ より相加平均と相乗平均の大小関係から、

$$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

また、

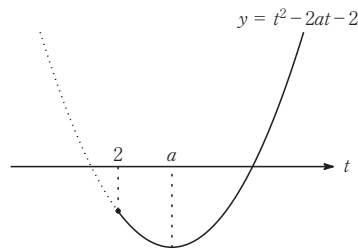
$$\begin{aligned} y &= t^2 - 2at - 2 \\ &= (t - a)^2 - a^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(i) $a \leq 2$ のとき、



$t \geq 2$ において $y \geq 2 - 4a$ となる。

(ii) $a > 2$ のとき,



① より, $y \geq -a^2 - 2$ となる.

$$(\text{答}) \begin{cases} 2 - 4a & (a \leq 2 \text{ のとき}) \\ -a^2 - 2 & (a > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

解説

本問は、指数関数で与えられた関数の最小値を求める問題でした。上の答案例には根本的な誤りがあるのですが、みなさんは気がつきましたか？

ちなみに、この問題の平均点は 16.7 点 (30 点満点) でした。得点率が 50 % を超えているので「よくできている」と思われる方もいらっしゃると思いますが、問題の難易度を考えると「50 % 強しかない」と見るべきだと思います。

このような結果になった主因は、「最大値・最小値の定義」をしっかりと理解できていないことにあります。

最大値・最小値の定義

$a \leq x \leq b$ で定義される関数 $f(x)$ について,

(I) M が $f(x)$ の最大値であるとは、以下の 2 条件を満たすことである。

・ $f(x) \leq M$ ($a \leq x \leq b$)

・ $f(c) = M$ ($a \leq c \leq b$) を満たす c が存在する。

(II) m が $f(x)$ の最小値であるとは、以下の 2 条件を満たすことである。

・ $f(x) \geq m$ ($a \leq x \leq b$)

・ $f(d) = m$ ($a \leq d \leq b$) を満たす d が存在する。

t の値の範囲を求める際、答案のほとんどが上の答案例のように相加平均と相乗平均の大小関係を利用していたのですが、得られた「 $t \geq 2$ 」は「不等式」であって、 t の取りうる値の範囲ではないことに注意してください。すなわち、 t は 2 以上であることは示されましたが、2 以上のすべての実数値を取ることは示されていません。

したがって、(i) $a \leq 2$ と (ii) $a > 2$ のそれぞれの場合で最小値を与える x を直接求めるか、そのような x が存在することをきちんと示すことが必要となります。

このように、求値問題だからといってただ正しい答を求めればよいというわけではないのが記述式であり、京大入試です。手順は覚えていてもその根本的な理解は不足していると思われる答案が数多く見受けられました。

以上のことと、上の最大値・最小値の定義を踏まえて、模範解答を見てみましょう。

模範解答

$$y = (2^x + 2^{-x})^2 - 2a(2^x + 2^{-x}) - 2$$

$t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと、 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ より相加平均と相乗平均の大小関係から、

$$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

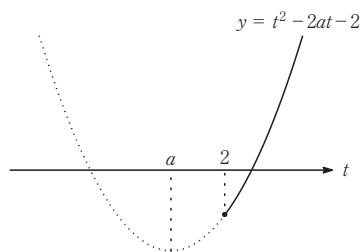
であり、等号成立条件は

$$2^x = 2^{-x} \quad \text{すなわち} \quad x = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

これより、 $t \geq 2$ となる。

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 2at - 2 \\ &= (t - a)^2 - a^2 - 2 \quad \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

(i) $a \leq 2$ のとき、



$t \geq 2$ において $y \geq 2 - 4a$ となる。

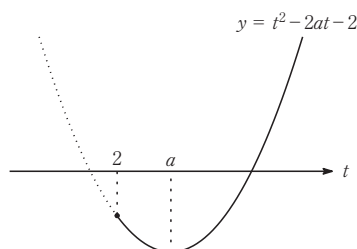
そこで、 $t = 2$ とすると、

$$2^x + 2^{-x} = 2$$

であり、①よりこれを満たす x として $x = 0$ がとれるので、 $y = 2 - 4a$ を満たす x は存在する。

よって、 y は最小値 $2 - 4a$ をとる。

(ii) $a > 2$ のとき,



② より, $y \geq -a^2 - 2$ となる.

そこで, $t = a$ とすると,

$$2^x + 2^{-x} = a$$

$$(2^x)^2 - a \cdot 2^x + 1 = 0$$

であり, これより,

$$2^x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

ここで, $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \frac{2}{a + \sqrt{a^2 - 4}}$ より,

$$x = \pm \log_2 \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

これより, $y = -a^2 - 2$ を満たす x は存在する.

よって, y は最小値 $-a^2 - 2$ をとる.

$$(\text{答}) \begin{cases} 2 - 4a & (a \leq 2 \text{ のとき}) \\ -a^2 - 2 & (a > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

アドバイス

● 解き方を見定める練習を

京大入試は解き方を自分で考えなければならない問題が多く出題されます。そのため、必要以上に難しい解き方にはまってしまい、気付いていれば効率よく解けた…ということになりがちです。つまり、初めてみる問題に対する解法の見定めが非常に大切になってきます。

→ 普段からいろいろな解法を念頭において演習を行うことが重要です。演習を通じて、問題に応じた最善の解き方を見つける練習を積みましょう。この積み重ねが入試本番にも生かされていきます。

● 書いた答案の見直し

解答を書くときには、限られた時間で完璧にすることは難しいものです。ですが、特に計算ミスと論理の間違い・飛躍は大きな減点につながってしまうので、注意が必要です。

→ 普段から、計算を自力で最後まで行う習慣をつけましょう。また、書いた答案に論理的に抜けているところがないか、見直しをする習慣もつけましょう。さらに、自分でよく見直した答案を先生に添削してもらい、自分では発見できないような間違いを指摘してもらうことも有効です。この繰り返しによって、高得点につながられるようになります。